第五章 导数

说明：导数与微分是两个十分重要的概念，数学分析主要任务是研究函数的各种性态及函数值的计算或近似计算，导数和微分是解决这些问题的有效工具.

§5．1 导数

一、实例

1． 瞬时速度

设质点P沿直线作变速运动，运动规律$S=S(t)$，求质点P在时刻t_0的瞬时速度$v(t_0)$. 从t_0到$t_0+\Delta t$一段时间内，质点P所走过的路程为$\Delta S(t_0)=S(t_0+\Delta t)-S(t_0)$. 从而平均速度为$\bar{v}=\dfrac{\Delta S}{\Delta t}=\dfrac{S(t_0+\Delta t)-S(t_0)}{\Delta t}$,当$|\Delta t|$愈小，则平均速度$\bar{v}=\dfrac{\Delta S}{\Delta t}$就愈接近瞬时速度$v(t_0)$，因而当$\Delta t\to 0$时，平均速度的极限就是瞬时速度，即$v(t_0)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta S}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{S(t_0+\Delta t)-S(t_0)}{\Delta t}$.

2． 切线的斜率

设函数$y=f(x)$，$x\in[a,b]$. 求曲线上$P(x_0,f(x_0))$点切线的斜率. 切线定义：曲线上P,Q两点作成的割线，当Q点沿曲线无限接近P点时的极限位置. 割线PQ的斜率：$\bar{k}=\dfrac{\Delta f}{\Delta x}=\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$,曲线上$P(x_0,f(x_0))$点切线的斜率 $k(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

二、导数的概念

定义 设$y=f(x)$在$U(x_0)$有定义，在x_0自变量x的改变量是$\Delta x=x-x_0$，相应函数的改变量是$\Delta y=f(x)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$,若$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$存在，称函数$f(x)$在$x_0$可导，此极限称为函数$f(x)$在$x_0$的导数（或微商）. 表为$f'(x_0)$或$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$. 即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$$

. 若此极限不存在，称函数$f(x)$在x_0不可导.

定义 若 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$（$\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$）存在，称函数 $f(x)$ 在 x_0 右可导（左可导），极限称为右导数（左导数），记为 $f'_+(x_0)$（$f'_-(x_0)$），有时也记为 $f'(x_0+0)$（$f'(x_0-0)$）.

易见，$f(x)$ 在 x_0 可导等价于 $f(x)$ 在 x_0 左、右可导都存在且相等.

曲线切线的斜率是函数 $y=f(x)$ 对自变量 x 的导数.（这也是导数的几何意义）

定理 1 若 $f(x)$ 在 x_0 可导，则 $f(x)$ 在 x_0 必连续.

证 明 由于 $f(x)$ 在 x_0 可导，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$，则 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\varepsilon\ >\delta\ \ni$，$\forall x: 0<|x-x_0|<\delta$，有 $\left|\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)\right|<\varepsilon$，即

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon|x-x_0|+|f'(x_0)||x-x_0|<(\varepsilon+|f'(x_0)|)\varepsilon$$

故 $f(x)$ 在 x_0 连续.

注记：$f(x)$ 在 x_0 可导，即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)$，则 $\Delta y=f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x)$，显然可导必连续．反之不成立，例如 $y=|x|$ 在 $x=0$ 连续，但不可导.

定义 若函数 $y=f(x)$ 在区间 I 的每一点都可导，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 可导，$f'(x)$ 称为 $f(x)$ 在 I 的导函数，简称导数，记为 $f'(x)$ 或 y' 或 $\dfrac{dy}{dx}$.

例 1 求 $f(x)=c$ 的导数.

解 $\forall x_0\in R$，Δx，有 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=c-c=0$，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=0$，故函数 $f(x)=c$ 在 R 上的每一点可导，且导数为零．即 $(c)'=0$.

例 2 求 $f(x)=x^n$ 的导数.

解 $\forall x_0\in R$，Δx，有

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=(x_0+\Delta x)^n-x_0^n=nx_0^{n-1}\Delta x+C_n^2x_0^{n-2}\Delta^2x+\cdots+\Delta^nx$$

所以 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(nx_0^{n-1}+C_n^2x_0^{n-2}\Delta x+\cdots+\Delta^{n-1}x)=nx_0^{n-1}$，即函数 $f(x)=x^n$ 在 R 上的每一点可导，且导数为 nx^{n-1}，或 $(x^n)'=nx^{n-1}$.

例 3 求 $f(x)=\sqrt{x}$ 的导数.

解 $\forall x\in(0,+\infty)$，Δx，有 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}$，所以

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

即函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上的每一点可导，且导数为 $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$，即 $(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$（$x\in(0,+\infty)$）.

例 4 求 $f(x)=\sin x$ 的导数.

解 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，$\Delta x$，有 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\cos\dfrac{2x+\Delta x}{2}\sin\dfrac{2\Delta x}{2}$，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{2\cos\frac{2x+\Delta x}{2}\sin\frac{2\Delta x}{2}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\cos\dfrac{2x+\Delta x}{2}\dfrac{\sin\frac{2\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=\cos x$，即函数 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的每一点可导，且导数为 $\cos x$，即 $(\sin x)'=\cos x$. 同样的方法可以计算的 $(\cos x)'=-\sin x$.

例 5 求 $f(x)=\log_a x(0<a\neq 1,x>0)$ 的导数.

解 $\forall x \in (0,+\infty)$，$\Delta x$，有

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = \log_a(x+\Delta x) - \log_a x = \log_a \frac{x+\Delta x}{x} = \log_a(1+\frac{\Delta x}{x})$$

所以 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a(1+\frac{\Delta x}{x})}{\Delta x} = \frac{1}{x} \lim\limits_{\Delta x \to 0} \log_a(1+\frac{\Delta x}{x})^{\frac{x}{\Delta x}} = \frac{1}{x\ln a}$，即函数 $f(x) = \log_a x$ 在 $(0,+\infty)$ 上的每一点可导，且导数为 $\frac{1}{x\ln a}$，即 $(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$，特别地，$(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

例 6 设 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, x \neq 0 \\ 0, \quad\quad x = 0 \end{cases}$，求 $f'(0)$.

解 $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$.

例 7 证明 函数 $f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, x \neq 0 \\ 0, \quad\quad x = 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 不可导，但连续.

证明 $f(x)$ 在 $x = 0$ 连续显然．因为 $\frac{f(x) - f(0)}{x} = \sin\frac{1}{x}$，由于当 $x \to 0$ 时，$\sin\frac{1}{x}$ 不存在极限，所以函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 不可导.

例 8 证明 $f(x) = \sqrt[3]{x}$ 在 $x = 0$ 不可导.

证明 由于 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = +\infty$，所以 $f(x) = \sqrt[3]{x}$ 在 $x = 0$ 不可导.

§5．2 求导法则与求导公式

一、导数的四则运算

定理 1 若函数 $u(x)$ 与 $v(x)$ 在 x 可导，则函数 $u(x) \pm v(x)$ 在 x 可导，且

$$(u(x) \pm v(x))' = u'(x) \pm v'(x).$$

证明 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(u(x+\Delta x)\pm v(x+\Delta x))-(u(x)\pm v(x))}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}(\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}\pm\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x})=u'(x)\pm v'(x)$$

即函数$u(x)\pm v(x)$在x可导，且$(u(x)\pm v(x))'=u'(x)\pm v'(x)$.

例 1 求函数 $f(x)=\sqrt{x}+\sin x+5$ 的导数.

解 $f'(x)=(\sqrt{x}+\sin x+5)'=(\sqrt{x})'+(\sin x)'+(5)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\cos x$.

定理 2 若函数$u(x)$与$v(x)$在x可导，则函数$u(x)v(x)$在x可导，且

$(u(x)v(x))'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$.

证明 由于函数$u(x)$与$v(x)$在x可导，则在x连续，所以

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(u(x+\Delta x)v(x+\Delta x))-(u(x)v(x))}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}(v(x+\Delta x)\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}+u(x)\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x})$$

$$=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$$

即函数$u(x)v(x)$在x可导，且$(u(x)v(x))'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$.

应用归纳法可将定理 2 推广到任意有限个函数乘积的导数.

若函数$u_1(x),u_2(x),\cdots,u_n(x)$在$x$都可导，则$u_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x)$可导，且

$(u_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x))'=\sum\limits_{i=1}^{n}u_1(x)u_2(x)\cdots u_i'(x)\cdots u_n(x)$.

特别地常数与函数乘积的导数等于常数乘函数的导数.

例 2 求函数 $f(x)=\sqrt{x}\sin x$ 的导数.

解 $f'(x)=(\sqrt{x}\sin x)'=(\sqrt{x})'\sin x+\sqrt{x}(\sin x)'=\dfrac{\sin x}{2\sqrt{x}}+\sqrt{x}\cos x$.

例 3 求函数 $f(x)=5\log_2 x-2x^5$ 的导数.

解 $f'(x)=(5\log_2 x-2x^5)'=(5\log_2 x)'-(2x^5)'=\dfrac{5}{x\ln 2}-10x^4$.

定理 3 若函数 $u(x)$ 与 $v(x)$ 在 x 可导，且 $v(x)\neq 0$ ，则函数 $\dfrac{u(x)}{v(x)}$ 在 x 可导，且

$$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]'=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)} .$$

证明 由于函数 $u(x)$ 与 $v(x)$ 在 x 可导，所以函数 $u(x)$ 与 $v(x)$ 在 x 连续以及 $v(x)\neq 0$ ，故

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)}-\dfrac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)v(x)-v(x+\Delta x)u(x)}{\Delta x v(x+\Delta x)v(x)}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}v(x)-\dfrac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}u(x)}{v(x+\Delta x)v(x)}$$

$$=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)} .$$

函数 $\dfrac{u(x)}{v(x)}$ 在 x 可导，且 $\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]'=\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$.

特别地，$v(x)$ 在 x 可导，且 $v(x)\neq 0$，则 $\left[\dfrac{1}{v(x)}\right]'=\dfrac{-v'(x)}{v^2(x)}$.

例 4 求正切函数 $\tan x$ 与余切函数 $\cot x$ 的导数.

解 $(\tan x)'=\left[\dfrac{\sin x}{\cos x}\right]'=\dfrac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}=\dfrac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$；

$$(\cot x)'=\left[\frac{\cos x}{\sin x}\right]'=\frac{(\cos x)'\sin x-\cos x(\sin x)'}{\sin^2 x}=-\frac{1}{\cos^2 x}=-\csc^2 x\ .$$

例 5 求正割函数 $\sec x$ 与余割函数 $\csc x$ 的导数.

解 $(\sec x)'=\left[\dfrac{1}{\cos x}\right]'=\dfrac{-(\cos x)'}{\cos^2 x}=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}=\sec x\tan x$.

$$(\csc x)'=\left[\frac{1}{\sin x}\right]'=\frac{-(\sin x)'}{\sin^2 x}=-\frac{\cos x}{\sin^2 x}=-\csc x\cot x$$

二、反函数的求导法则

定理 4 若函数 $f(x)$ 在 x 的邻域连续，并严格单调，函数 $y=f(x)$ 在 x 可导，且 $f'(x)\neq 0$，则它的反函数 $x=\varphi(y)$ 在 $y(y=f(x))$ 可导，且 $\varphi'(y)=\dfrac{1}{f'(x)}$.

证明 由于函数 $f(x)$ 在 x 的邻域连续，并严格单调，则 $\Delta x\to 0\Leftrightarrow\ \Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)\to 0$. 且 $\varphi(y+\Delta y)=\varphi(f(x+\Delta x))=x+\Delta x,\varphi(y)=x$，因此

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\varphi(y+\Delta y)-\varphi(y)}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{f(x+\Delta x)-f(x)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}}=\frac{1}{f'(x)}\ .$$

例 6 求指数函数 $y=a^x(0<a\neq 1)$ 的导数.

解 令 $x=\log_a y$，则 $y'=(a^x)'=\dfrac{1}{\dfrac{d}{dy}(\log_a y)}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{y\ln a}}=y\ln a=a^x\ln a$. 即：$(a^x)'=a^x\ln a$

特别地， $(e^x)'=e^x$.

例 7 求反三角函数 $y=\arcsin x,\arccos x,\arctan x,\mathrm{arc}\cot x$ 的导数.

解 令 $x=\sin y$，则 $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\dfrac{d}{dy}(\sin y)}=\dfrac{1}{\cos y}=\dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

即 $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

同理：$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$， $(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$， $(\mathrm{arc}\cot x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$.

三、复合函数的求导法则

定理 5 若函数 $y=f(u)$ 在 u 可导，函数 $u=\varphi(x)$ 在 x 可导，则复合函数 $y=f(\varphi(x))$ 在 x 也可导，且 $(f(\varphi(x)))'=f'(u)\varphi'(x)$，或 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx}$.

证明 由于函数 $y=f(u)$ 在 u 可导，则 $\Delta y=f(u+\Delta u)-f(u)=f'(u)\Delta u+o(\Delta u)$，令 $\Delta u=\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)$，则

$$\Delta y=f(\varphi(x+\Delta x))-f(\varphi(x))=f'(u)(\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x))+o(\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)) \quad (*)$$

由于 $u=\varphi(x)$ 在 x 可导，则 $u=\varphi(x)$ 在 x 连续，故 $\Delta x\to 0\Rightarrow \Delta u=\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)\to 0$. 若当 $\Delta x\neq 0$ 时，有 $\Delta u=\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)\neq 0$，在（*）式两边除 Δx 并令 $\Delta x\to 0$ 取极限，有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(u)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{o(\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x))}{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}\frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x}=f'(u)\varphi'(x).$$

若当$\Delta x\neq 0$时，有$\Delta u=\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)=0$，则$\Delta y=f'(u)(\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x))$，式两边除$\Delta x$并令$\Delta x\to 0$取极限，有$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(u)\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x}=f'(u)\varphi'(x)$.

例 8 求函数$y=\sin 5x$的导数.

解 $y'=(\sin 5x)'=\cos 5x(5x)'=5\cos x$.

例 9 求对数函数$y=\ln(-x)(x<0)$的导数.

解 $y'=(\ln(-x))'=\frac{1}{-x}(-x)'=\frac{1}{x}$.

从而有$(\ln|x|)'=\frac{1}{x}(x\neq 0)$.

例 10 幂函数$y=x^{\alpha}(x>0)$（α是实数）的导数.

解 $y'=(x^{\alpha})'=(e^{\alpha\ln x})'=e^{\alpha\ln x}(\alpha\ln x)'=x^{\alpha}\frac{\alpha}{x}=\alpha x^{\alpha-1}$.

例 11 求幂指函数$y=(f(x))^{\varphi(x)}$的导数.

解 $y'=\left((f(x))^{\varphi(x)}\right)'=\left(e^{\varphi(x)\ln f(x)}\right)'=e^{\varphi(x)\ln f(x)}\left(\varphi(x)\ln f(x)\right)'$

$$=(f(x))^{\varphi(x)}(\varphi'(x)\ln f(x)+\frac{\varphi(x)f'(x)}{f(x)}).$$

例 12 求函数$y=shx$与$y=chx$的导数

解 $y'=(shx)'=\left(\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\right)'=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}=chx$,

$$y' = (chx)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = shx .$$

例 13 求函数 $y = thx$ 与 $y = \coth x$ 的导数.

解 $y' = (thx)' = \left(\frac{shx}{chx}\right)' = \frac{(shx)'chx - shx(chx)'}{ch^2x} = \frac{ch^2x - sh^2x}{ch^2x} = \frac{1}{ch^2x}$.

同理 $y' = (\coth x)' = -\frac{1}{sh^2x}$.

四、初等函数的导数

基本初等函数的求导公式

1．$(c)' = 0$，其中 c 是常数.

2．$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$，其中 α 是常数，特别地 $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$，$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

3．$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$，$(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

4．$(a^x)' = a^x \ln a$，$(e^x)' = e^x$.

5．$(\sin x)' = \cos x$；$(\cos x)' = -\sin x$；$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$；

$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$；$(\sec x)' = \tan x \sec x$；$(\csc x)' = -\cot x \csc x$；

6．$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；

$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$；$(\mathrm{arc}\cot x)' = -\frac{1}{1+x^2}$；

7．$(shx)' = chx$；$(chx)' = shx$；$(thx)' = \frac{1}{ch^2x}$；$(\coth x)' = -\frac{1}{sh^2x}$.

初等函数是由基本初等函数经过有限次四则运算与复合运算得到，所以初等函数在其定义域可导.

例 14 求函数 $y=\tan^3\ln x$ 的导数.

解 $y'=(\tan^3\ln x)'=\sec^6\ln x(\ln x)'=\dfrac{\sec^6\ln x}{x}$.

例 15 求函数 $y=\ln\ln\ln x$ 的导数.

解 $y'=(\ln\ln\ln x)'=\dfrac{(\ln\ln x)'}{\ln\ln x}=\dfrac{(\ln x)'}{\ln x\cdot\ln\ln x}=\dfrac{1}{x\cdot\ln x\cdot\ln\ln x}$.

例 16 求函数 $y=\dfrac{1}{2}\arctan\dfrac{2x}{1-x^2}$ 的导数.

解 $y'=\left(\dfrac{1}{2}\arctan\dfrac{2x}{1-x^2}\right)'=\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{2x}{1-x^2}\right)^2}\left(\dfrac{2x}{1-x^2}\right)'=\dfrac{1+x^2}{1+x^4}$.

例 17 求函数 $y=e^{(1-\sin x)^{\frac{1}{2}}}$ 的导数.

解 $y'=(e^{(1-\sin x)^{\frac{1}{2}}})'=e^{(1-\sin x)^{\frac{1}{2}}}((1-\sin x)^{\frac{1}{2}})'=\dfrac{e^{(1-\sin x)^{\frac{1}{2}}}}{2\sqrt{1-\sin x}}(1-\sin x)'=-\dfrac{\cos xe^{(1-\sin x)^{\frac{1}{2}}}}{2\sqrt{1-\sin x}}$.

例 18 求函数 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 的导数.

解 $y'=(\ln(x+\sqrt{1+x^2}))'=\dfrac{(x+\sqrt{1+x^2})'}{x+\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}(1+\dfrac{(1+x^2)'}{2\sqrt{1+x^2}})=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

例 19 求函数 $y=\sin(\cos^2(x^3+x))$ 的导数.

解 $y'=(\sin(\cos^2(x^3+x)))'=\cos(\cos^2(x^3+x))(\cos^2(x^3+x))'$

$=2\cos(\cos^2(x^3+x))\cos(x^3+x)(\cos(x^3+x))'$

$=-2\cos(\cos^2(x^3+x))\cos(x^3+x)\sin(x^3+x)(x^3+x)'$

$$=-2\cos(\cos^2(x^3+x))\cos(x^3+x)\sin(x^3+x)(3x^2+1).$$

§5．3 隐函数与参数方程求导法则

一、隐函数的求导法则

定义 设有两个非空集合 A 与 B，若 $\forall x\in A$，由二元方程 $F(x,y)=0$ 对应唯一一个 $y\in B$，则称此对应关系 f （或写为 $y=f(x)$ ）是二元方程 $F(x,y)=0$ 确定的隐函数.

求由二元方程 $F(x,y)=0$ 确定的隐函数 $y=f(x)$ 的导，只须在方程 $F(x,y)=0$ 两边对 x 求导，把 y 看成是 x 的函数即可.

例 1 求 $xy+3x^2-5y-7=0$ 所确定的隐函数的导数.

解 在 $xy+3x^2-5y-7=0$ 两边对 x 求导，得 $y+xy'+6x-5y'=0$，即 $y'=\dfrac{y+6x}{5-x}$.

例 2 求 $e^y=xy$ 所确定的隐函数的导数.

解 在 $e^y=xy$ 两边对 x 求导，得 $y'e^y=xy'+y$，解得 $y'=\dfrac{x}{e^y-y}$.

例 3 证明：过双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上一点 (x_0,y_0) 的切线方程是 $\dfrac{xx_0}{a^2}-\dfrac{yy_0}{b^2}=1$.

证明 当 $y_0\neq 0$ 时，在 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的两边对 x 求导，得 $\dfrac{2x}{a^2}-\dfrac{2yy'}{b^2}=0$，则 $y'|_{x=x_0}=\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}$，从而点 (x_0,y_0) 的切线方程是：$y-y_0=\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}(x-x_0)$，则 $\dfrac{xx_0}{a^2}-\dfrac{yy_0}{b^2}=\dfrac{x_0^2}{a^2}-\dfrac{y_0^2}{b^2}=1$.

当 $y_0=0$ 时，$x_0=a$，此时的切线为 $x=a$，也满足结论.

例 4 证明：抛物线 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}(0<x<a)$ 上任一点的切线在两坐标轴上的截距的和等于 a .

证明 在 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ 两边对 x 求导，得 $\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{y'}{\sqrt{y}}=0$ ，则 $y'=-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$ ，则抛物线 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ 上一点 (x,y) 处的切线方程为 $Y-y=-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}(X-x)$ ，从而在两坐标轴上的截距分别为 $y+\sqrt{xy}$ 和 $x+\sqrt{xy}$ ，从而它们的为 $x+2\sqrt{xy}+y=(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2=a$.

在计算比较复杂的函数的导数是，可以在函数两边取对数，再利用隐函数求导法则计算．即：在 $y=f(x)$ 两边取对数的 $\ln y=\ln f(x)$ ，然后两边对 x 求导，这样可以简化计算．

例 5 求函数 $y=\sqrt[3]{\frac{x^2}{x-a}}$ 的导数．

解 两边取对数得 $\ln y=\frac{1}{3}(2\ln x-\ln(x-a))$ ，两边对 x 求导，有 $\frac{y'}{y}=\frac{1}{3}(\frac{2}{x}-\frac{1}{x-a})=\frac{x-2a}{3x(x-a)}$ ，则 $y'=\sqrt[3]{\frac{x^2}{x-a}}\frac{x-2a}{3x(x-a)}$.

例 6 求幂指函数 $y=x^x(x>0)$ 的导数．

解 两边取对数得 $\ln y=x\ln x$ ，两边对 x 求导，有 $\frac{y'}{y}=\ln x+1$ ，则 $y'=x^x(\ln x+1)$.

二、参数方程的求导法则

参数方程的一般形式是 $\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$， $\alpha\le t\le\beta$.

若 $x=\varphi(t)$ 与 $y=\psi(t)$ 都可导，且 $\varphi'(t)\neq 0$ ，又 $x=\varphi(t)$ 存在反函数 $t=\varphi^{-1}(x)$ ，则 y 是 x 的复合函数，即 $y=\psi(t),t=\varphi^{-1}(x)$ ，由复合函数的求导法则，有 $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\psi'(t)(\varphi^{-1}(x))'=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$.

例 7 求椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上一点 $(\dfrac{a}{\sqrt{2}},\dfrac{b}{\sqrt{2}})$ 的切线斜率.

解 令椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的参数方程为 $\begin{cases} x=a\cos\theta \\ y=b\sin\theta \end{cases},0\le\theta\le 2\pi$，则点 $(\dfrac{a}{\sqrt{2}},\dfrac{b}{\sqrt{2}})$ 对应的参数 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$. 由于 $y'|_{\theta=\frac{\pi}{4}}=b\cos\theta|_{\theta=\frac{\pi}{4}}=\dfrac{b}{\sqrt{2}},x'|_{\theta=\frac{\pi}{4}}=-a\sin\theta|_{\theta=\frac{\pi}{4}}=-\dfrac{a}{\sqrt{2}}$，所以，点 $(\dfrac{a}{\sqrt{2}},\dfrac{b}{\sqrt{2}})$ 的切线斜率 $k=\dfrac{y'}{x'}=-\dfrac{b}{a}$.

例 8 设炮弹的弹头初速度是 v_0，沿着与地面成 α 角的方向抛射出去，求时刻 t_0 时弹头的运动方向.（忽略空气阻力、风向等因素）.

解 炮弹在空中飞行的参数方程为 $\begin{cases} x=\cos\alpha v_0 t \\ y=\sin\alpha v_0 t-\dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases}$，则在 t_0 时弹头水平方向的速度为 $\dfrac{dx}{dt}=\cos\alpha v_0$，竖直方向的速度为 $\dfrac{dy}{dt}=\sin\alpha v_0-gt_0$，设 t_0 时弹头的运动方向与水平方向的夹角为 φ，则 $\tan\varphi=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\sin\alpha v_0-gt_0}{\cos\alpha v_0}=\tan\alpha-\dfrac{gt_0}{\cos\alpha v_0}$， $\varphi=\arctan(\tan\alpha-\dfrac{gt_0}{\cos\alpha v_0})$.

§5．4 微分

一、微分的概念

定义 若函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的改变量 Δy 与自变量的改变量 Δx 有如下关系 $\Delta y=A\Delta x+\circ(\Delta x)$，其中 A 是与 Δx 无关的常数，称函数 $f(x)$ 在 x_0 可微，$A\Delta x$ 称为函数 $f(x)$ 在 x_0 的微分，记为 $dy=A\Delta x$. $A\Delta x$ 也称为线性主部.

由于自变量 x 的改变量 Δx 与微分 dx 相等，因此，函数的微分也记做 $dy=Adx$.

微分的几何意义：微分是曲线 $y=f(x)$ 在 (x,y) 处的切线对应的改变量．用微分 dy 近似地代替改变量 Δy，从几何上看就是用切线的改变量近似地代替函数的改变量（以直代曲）.

定理 1 函数 $f(x)$ 在 x_0 可微 $\Leftrightarrow$ 函数 $f(x)$ 在 x_0 可导.

证明 必要性 $(\Rightarrow)$ 函数 $f(x)$ 在 x_0 可微，则 $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + \circ(\Delta x)$，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{A\Delta x+\circ(\Delta x)}{\Delta x} = A$，故函数 $f(x)$ 在 x_0 可导，且 $f'(x_0) = A$.

充分性 $(\Leftarrow)$ 函数 $f(x)$ 在 x_0 可导，即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$，则

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)+\alpha$，其中 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha = 0$，则 $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha\Delta x = f'(x_0)\Delta x + \circ(\Delta x)$，则函数 $f(x)$ 在 x_0 可微，且 $f'(x_0) = A$.

二、微分的运算法则和公式

已知可导和可微是等价的，且 $dy = y'dx$.

从而有：若函数 $u(x)$ 与 $v(x)$ 可微，则

1. $d(cu(x)) = cdu(x)$，其中 c 为常数；

2. $d(u(x)\pm v(x)) = du(x)\pm dv(x)$；

3. $d(u(x)\cdot v(x)) = v(x)du(x)+u(x)dv(x)$；

4. $d(\dfrac{u(x)}{v(x)}) = \dfrac{v(x)du(x)-u(x)dv(x)}{v^2(x)}$.

求微分公式：

1. $y = c, dy = 0$，其中 c 是常数.

2. $y = x^\alpha, dy = \alpha x^{\alpha-1}dx$，其中 α 是常数；$y = \dfrac{1}{x}, dy = -\dfrac{dx}{x^2}$；$y = \sqrt{x}, dy = \dfrac{dx}{2\sqrt{x}}$.

3. $y=\log_a x, dy=\dfrac{dx}{x\ln a}; y=\ln x, dy=\dfrac{dx}{x}$；

4. $y=a^x, dy=a^x\ln a dx; y=e^x, dy=e^x dx$；

5. $y=\sin x, dy=\cos x dx, y=\cos x, dy=-\sin x dx$；

$y=\tan x, dy=\dfrac{dx}{\cos^2 x}; y=\cot x, dy=-\dfrac{dx}{\sin^2 x}$.

6. $y=\arcsin x, dy=\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}; y=\arccos x, dy=-\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$；

$y=\arctan x, dy=\dfrac{dx}{1+x^2}; y=\operatorname{arc}\cot x, dy=-\dfrac{dx}{1+x^2}$.

设 $y=f(u), u=g(x)$，则复合函数 $y=f(g(x))$ 的微分为：$dy=(f\circ g)'(x)dx=f'(g(x))g'(x)dx$，$dy=f'(u)du$. 把 $dy=f'(u)du$ 与 $dy=f'(x)dx$ 相比较，虽然 x 是自变量，u 是中间变量，但两者形式上是一样的，这一性质称为一阶微分形式的不变性.

三、微分在近似计算上的应用

例 1 求 $\tan 31^\circ$ 的近似值.

解 由于 $y=\tan x$ 在 $x_0=\dfrac{\pi}{6}$ 处可微，取 $\Delta x=\dfrac{\pi}{180}$，而 $y'|_{x_0=\frac{\pi}{6}}=\dfrac{1}{\cos^2 x}|_{x_0=\frac{\pi}{6}}=\dfrac{4}{3}$，$\tan\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 则

$\tan 31^\circ=\tan\dfrac{\pi}{6}+y'|_{x_0=\frac{\pi}{6}}\Delta x+\circ(\Delta x)\approx\dfrac{\sqrt{3}}{3}+\dfrac{4}{3}\times\dfrac{\pi}{180}\approx 0.60062$. $\tan 31^\circ$ 的精确值为 $0.6008606\cdots$.

例 2 求 $\sqrt[3]{131}$、$\sqrt[5]{34}$ 的近似值.

解 当 $|x|$ 很小时，有 $(1+x)^{\frac{1}{n}}\approx 1+\dfrac{x}{n}$，因此有：

$\sqrt[3]{131}=\sqrt[3]{125+6}=5(1+\dfrac{6}{125})^{\frac{1}{3}}\approx 5(1+\dfrac{2}{125})=5.08$（精确值为 $5.078753\cdots$）；

$\sqrt[5]{34}=\sqrt[5]{32+2}=2(1+\dfrac{1}{16})^{\frac{1}{5}}\approx 2(1+\dfrac{1}{80})=2.025$（精确值为 $2.024397\cdots$）.

§5．5 高阶导数与高阶微分

一、高阶导数

定义 函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 在 x 的导数称为函数 $f(x)$ 在 x 的二阶导数，记为 $f''(x)$，即 $f''(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x}$，二阶导数 $f''(x)$ 在 x 的导数称为函数 $f(x)$ 在 x 的三阶导数，记为 $f'''(x)$．一般地，函数 $f(x)$ 的 $n-1$ 阶导数在 x 的导数称为函数 $f(x)$ 在 x 的 n 阶导数，记为 $f^{(n)}(x)$，即 $f^{(n)}(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f^{(n-1)}(x+\Delta x)-f^{(n-1)}(x)}{\Delta x}$．

二阶与二阶以上导数统称为高阶导数，有时，高阶导数也记为 $\dfrac{d^2y}{dx^2},\dfrac{d^3y}{dx^3},\cdots,\dfrac{d^ny}{dx^n}$．

例 1 求 $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n(a_0\neq 0)$ 的各阶导数.

解 利用高阶导数的定义直接计算得：

$P'(x)=na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+\cdots+2a_{n-2}x+a_{n-1}$；

$P''(x)=n(n-1)a_0x^{n-2}+(n-1)(n-2)a_1x^{n-3}+\cdots+6a_{n-3}x+2a_{n-2}$； ……；

$P^{(i)}(x)=n(n-1)\cdots(n-i+1)a_0x^{n-i}+\cdots+(i+1)i\cdots 2a_{n-i+1}x+i!a_{n-i}(1\le i\le n-1)$；

$P^{(n)}(x)=n!a_0$； $P^{(k)}(x)=0(k\ge n+1)$．

例 2 求 $f(x)=e^{ax}$（a 为常数）的 n 阶导数.

解 利用高阶导数的定义直接计算得：

$f'(x)=ae^{ax}$； $f''(x)=a^2e^{ax}$；一般地， $f^{(n)}(x)=a^ne^{ax}$．

例 3 求 $f(x)=\sin x$ 的 n 阶导数.

解 利用高阶导数的定义直接计算得：$f'(x)=\cos x=\sin(x+\dfrac{\pi}{2})$；

$f''(x)=\cos(x+\dfrac{\pi}{2})=\sin(x+\dfrac{2\pi}{2})$；一般地，$f^{(n)}(x)=\cos(x+\dfrac{(n-1)\pi}{2})=\sin(x+\dfrac{n\pi}{2})$.

例 4 求 $f(x)=\cos x$ 的 n 阶导数.

解 利用高阶导数的定义直接计算得：$f'(x)=-\sin x=\cos(x+\dfrac{\pi}{2})$；

$f''(x)=-\sin(x+\dfrac{\pi}{2})=\cos(x+\dfrac{2\pi}{2})$；一般地，$f^{(n)}(x)=-\sin(x+\dfrac{(n-1)\pi}{2})=\cos(x+\dfrac{n\pi}{2})$

例 5 求 $f(x)=\ln(1+x)$ 的 n 阶导数.

解 $f'(x)=\dfrac{1}{1+x}=(1+x)^{-1}$，$f''(x)=-(1+x)^{-2}$，一般地，$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n}$.

例 6 求 $f(x)=(1+x)^{\alpha}\,(\alpha\in R)$ 的 n 阶导数.

解 $f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1}$，$f''(x)=\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$，一般地，$f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$.

二、莱布尼茨公式

定理（莱布尼茨公式）　若 u 与 v 都是 x 的函数，且 n 阶可导，则 $(uv)^{(n)}=\sum\limits_{i=0}^{n}C_n^i u^{(n-i)}v^{(i)}$.

证明 利用数学归纳法来证明.

假设当 $n=k$ 时结论成立，即 $(uv)^{(k)}=\sum\limits_{i=0}^{k}C_k^i u^{(k-i)}v^{(i)}$ ，则

$$(uv)^{(k+1)}=(\sum_{i=0}^{k}C_k^i u^{(k-i)}v^{(i)})'=\sum_{i=0}^{k}(C_k^i u^{(k-i)}v^{(i)})'=\sum_{i=0}^{k}(C_k^i u^{(k+1-i)}v^{(i)}+C_k^i u^{(k-i)}v^{(i+1)})$$

$$=\sum_{i=0}^{k}(C_k^i u^{(k+1-i)}v^{(i)}+C_k^{i-1}u^{(k+1-i)}v^{(i)})+C_k^k u^{(0)}v^{(k+1)}=\sum_{i=0}^{k}C_{k+1}^i u^{(k+1-i)}v^{(i)}+C_{k+1}^{k+1}u^{(0)}v^{(k+1)}$$

$$=\sum_{i=0}^{k+1}C_{k+1}^i u^{(k+1-i)}v^{(i)}\ .$$

即当时，结论也成了．由数学归纳法知结论成立．

例 7 设 $y=x^2e^{2x}$，求 $y^{(20)}$.

解 记 $u=x^2, v=e^{2x}$，则 $u'=2x$， $u''=2$， $u^{(i)}=0(i\geq 3)$； $v^{(j)}=2^j e^{2x}$，故由莱布尼茨公式知

$$y^{(20)}=\sum_{i=0}^{20}C_{20}^i u^{(20-i)}v^{(i)}=C_{20}^{18}u''v^{(18)}+C_{20}^{19}u'v^{(19)}+C_{20}^{20}uv^{(20)}$$

$$=\frac{20\times 19}{2}\cdot 2\cdot 2^{18}e^{2x}+20\cdot 2\cdot 2^{19}xe^{2x}+2^{20}x^2e^{2x}=2^{20}(95+20x+x^2)e^{2x}\ .$$

例 8 设 $y=x^2\cos x$，求 $y^{(50)}$.

解 记 $u=x^2, v=\cos x$，则 $u'=2x$， $u''=2$， $u^{(i)}=0(i\geq 3)$； $v^{(j)}=\cos(x+\frac{j\pi}{2})$，故由莱布尼茨公式知

$$y^{(50)}=\sum_{i=0}^{50}C_{50}^i u^{(50-i)}v^{(i)}=C_{50}^{48}u''v^{(48)}+C_{50}^{49}u'v^{(49)}+C_{50}^{50}uv^{(50)}$$

$$=\frac{50\times 49}{2}\cdot 2\cos(x+\frac{48\pi}{2})+50\cdot 2x\cos(x+\frac{49\pi}{2})+x^2\cos(x+\frac{50\pi}{2})$$

$$=2450\cos x-100x\sin x-x^2\cos x\ .$$

例 9 称 $P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$ 为勒让德次多项式，求 $P_n(1)$ 与 $P_n(-1)$.

解 记$u=(x+1)^n, v=(x-1)^n$，则$u^{(i)}=n(n-1)\cdots(n-i+1)(x+1)^{n-i}$，$u^{(n)}=n!$，

$v^{(i)}=n(n-1)\cdots(n-i+1)(x-1)^{n-i}$，$v^{(n)}=n!$．故由莱布尼茨公式知：

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\sum_{i=0}^{n}C_n^i u^{(n-i)}v^{(i)}=\frac{1}{2^n n!}\sum_{i=0}^{n}C_n^i n(n-1)\cdots(i+1)n(n-1)\cdots(n-i+1)(x+1)^i(x-1)^{n-i}.$$

因此，$P_n(1)=\frac{1}{2^n n!}n!2^n=1$，$P_n(-1)=\frac{1}{2^n n!}n!(-2)^n=(-1)^n$.

三、高阶微分

定义 函数$y=f(x)$的微分$dy=f'(x)dx$（dx为常数）的微分，称微函数$f(x)$的二阶微分，表为d^2y. 一般情况，函数$f(x)$的$n-1$阶微分$d^{n-1}y$的微分，称为函数$f(x)$的n阶微分，表为d^ny. 二阶和二阶以上的微分统称为高阶微分.

易见，$d^ny=f^{(n)}(x)dx^n$.

注意：$dx^n=(dx)^n$是自变量微分的n次方，$d(x^n)=nx^{n-1}dx$是函数$y=x^n$的微分，而d^nx应理解为x的n阶微分.

一阶微分具有形式不变性，即不论是对中间变量u，还是对自变量x，都有$dy=f'(u)du$，$dy=f'(x)dx$. 高阶微分是否也具有形式不变性呢?

当x是自变量时，$d^ny=f^{(n)}(x)\ dx^n$，当u是自变量时，$d^ny=f^{(n)}(u)du^n$ 是否仍成立？

设$y=e^x$，当x是自变量时有：$d^2y=e^x\ dx^2$. 又若$x=t^2$，则复合函数为$y=e^{t^2}$，故，$d^2y=(e^{t^2})''\ dt^2=(2e^{t^2}+4t^2e^{t^2})\ dt^2$. 但$e^xdx^2=e^{t^2}(2tdt)^2=4t^2e^{t^2}\ dt^2$. 可见当$x$是中间变量时，$d^2y=e^x\ dx^2$不再成立，它少了一项$2e^{t^2}dt^2$. 所以高阶微分不再具有形式不变性.

一般地若$y=f(x)$，$x=g(t)$，由一阶微分形式不变性有，$dy=f'(x)dx$. 由于这时x是中间变量，故dx和x不再独立，它们都是自变量的函数，在求二阶微分时应该用乘积的微分法则，即

$$d^2y=f''(x)\ dx^2+f'(x)\ d^2x.$$

与x是自变量情形比较，它多了第二项，这就说明了高阶微分不具有形式不变性. 因此，在带有高阶微分的等式中，不能随便使用变量代入. 这是高阶微分与一阶微分的重要差别.